**CHUYÊN ĐỀ**

**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT**

**CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.**

**Phần 1- Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác.**

-Ta chứng minh một Bổ đề : Xác định điều kiện của a,b,c để phương trình:

  *(1)* có nghiệm.

.Điều kiện i) : 

.Điều kiện ii) : 

 

Khi đó : (1) 

Do , nên : 

Vậy điều kiện ii) để pt *(1)* có nghiệm là : 

Ta vận dụng điều kiện này để giải quyết một số bài toán về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất như sau:

Bài 1-Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số : . *(1)*

Giải.

-Xác định miền giá trị của y để (1) có nghiệm :

.Do 

.Khi đó : 

 

Phương trình (\*) có nghiệm khi : 

 

-Lập bảng xét dấu của (\*\*)

|  |  |
| --- | --- |
| y | -∞   +∞ |
| f(y) |  + 0 - 0 + |

Vậy : Tập giá trị của y là : 

Hay :  và 

-----------------------

Bài 2-Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

--Xác định miền giá trị của y để *(1)* có nghiệm :

.Do 

.Khi đó : 

 

Phương trình (\*) có nghiệm khi : 

 

-Lập bảng xét dấu của (\*\*)

|  |  |
| --- | --- |
| y | -∞   +∞ |
| f(y) |  + 0 - 0 + |

Vậy : Tập giá trị của y là : 

Hay :  và 

-----------------------

Bài 3-Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

--Xác định miền giá trị của y để *(1)* có nghiệm :

.Do 

.Khi đó : 

 

Phương trình (\*) có nghiệm khi : 

 

-Lập bảng xét dấu của (\*\*)

|  |  |
| --- | --- |
| y | -∞   +∞ |
| f(y) |  + 0 - 0 + |

Vậy : Tập giá trị của y là : 

Hay :  và 

-------------------

Bài 4-Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

-Xét biểu thức : , nên y xác định với mọi x ∈R.

-Khi đó : 

 

Phương trình (\*) có nghiệm khi : 

-Áp dụng bất đẳng thức Svasơ – Bunhiakopsky cho 4 số :

 

Ta có : 



-Lập bảng xét dấu của (\*\*)

|  |  |
| --- | --- |
| y | -∞   +∞ |
| f(y) |  + 0 - 0 +  |

Tập giá trị của y là : 

Vậy :  và .

 --------------------------

Bài 5-Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

-Xác định miền giá trị của y để *(1)* có nghiệm :

.Do 

.Khi đó : 

 

Phương trình (\*) có nghiệm khi : 

-Lập bảng xét dấu của (\*\*)

|  |  |
| --- | --- |
| y | -∞   +∞ |
| f(y) |  + 0 - 0 + |

Vậy : Tập giá trị của y là : 

Hay :  và 

-----------------------

**Bài 6-**Tìm giá trị lớn nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

--Xác định miền giá trị của y để *(1)* có nghiệm :

.Do  (do sinx, cosx không đồng thời bằng 1)

.Khi đó : 

 

Phương trình (\*) có nghiệm khi : 

-Lập bảng xét dấu của (\*\*)

|  |  |
| --- | --- |
| y | -∞   +∞ |
| f(y) |  + 0 - 0 + |

Vậy : Tập giá trị của y là : 

Hay :  và 

-----------------------

**Phần 2: Sử dụng bất đẳng thức vào tính toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.**

-Ta nhắc lại một số bất đẳng thức liên quan:

1-Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương :

2-Bất đẳng thức Svasơ - Bunhiakopsky :

 a).Cho 4 số thực : 

 -Đẳng thức xảy ra khi : 

 b).Cho 6 số thực : .

 -Đẳng thức xảy ra khi : 

------------

Bài 7-Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

 .*(1)*

Giải.

-Biến đổi tương đương : 

 

-Áp dụng BĐT Svasơ - Bunhiakopsky cho 4 số :

 , được:





Hay : 

Vậy : 

.Đẳng thức xảy ra khi : 

 

-----------------------

**Bài 8**-Cho .Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

 .*(1)*

Giải.

-Áp dụng BĐT Svasơ - Bunhiakopsky cho 6 số :

 :



Hay : 

Vậy : 

-----------------------

**Bài 9**- Cho  và Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

 .*(1)*

Giải.

-Ta xét giả thiết : 

 

-Áp dụng bất đẳng thức Svasơ – Bunhiakopsky cho 6 số :

 :



Hay : 

Vậy : 

-----------------------

**Bài 10-**Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

 .*(1)*

Giải.

--Áp dụng bất đẳng thức Svasơ – Bunhiakopsky cho 6 số :

 :



Hay : 

Vậy : 

-Đẳng thức xảy ra khi : .

-----------------------

Phần 3- Sử dụng công cụ đạo hàm.

**Bài 11-**Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

-Hàm số xác định khi : , .Ta khảo sát trên 

-Tính : 





-Bảng biến thiên:

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0   |
| y’ |  + 0 - |
| y |   1 1 |

Vậy :  và .

-----------------------

**Bài 12-**Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

 .*(1)*

Giải.

-Hàm số xác định với mọi x ∈ R.

-Tính : 

.

.y đạt giá trị lớn nhất tại 1 trong 2 điểm đó mà y’ = 0

+Khi 

Khi đó :  (\*)

+Khi 

Khi đó :  (\*\*)

Xét (\*) và (\*\*) cho ta :  , khi 

-----------------------

**Phần 4- Một số dạng khác.**

**Bài 13-**Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số :

 .*(1)*

Giải.

-Ta xét biểu thức : 

(do :) .Vậy y xác định với mọi x∈R.

-Biến đổi tương đương :



Ta giải và biện luận phương trình (\*):

+Khi .



Vậy nếu . Hay :  và  *(a)*

+Khi .Điều kiện có nghiệm là :



Vậy nếu . Hay :  và  *(b)*

Từ (a) , (b) Ta có :  và .

-----------------------

**Bài 14-**Gọi α là một góc cho trước.Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

 .*(1)*

Giải.

-Ta xét đẳng thức: 

 

-Đặt  , 

-Khi đó: 

 

+Do α cho trước, nên tử thức đạt giá trị lớn nhất khi :  , suy ra : 

.Nếu  ,  :Mẫu thức đạt giá trị lớn nhất bằng :

 

.Nếu  ,  :Mẫu thức đạt giá trị lớn nhất bằng :

 

Vậy :

 +Khi  thì : 

 +Khi  thì : 

-----------------------

**Bài 15-**Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : .*(1)*

Giải.

-Ta xét 

 .mà 

 .Đẳng thức xảy ra khi : 

-Ta xét 

 .mà 

 .Đẳng thức xảy ra khi : 

Vậy :  ( khi : ).

Bài 16-Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của :

  *(1)*

Giải.

-Biến đổi tương dương : 

 

Do đó : 

-Do , nên khi 

-Do , nên khi 

Vậy : và 

 ---------------------

**Bài 17 –**Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của : 

Giải.

-Điều kiện : , ta đặt : 



-Do 

 

+Khi .Vậy 

+Khi .Vậy  --hết----